



**Análisis matricial de estructuras**  
**Introducción al método de elementos finitos**

**Autor:** Alder Jhosué Quispe Panca

© Derechos de autor registrados:  
Empresa Editora Macro EIRL

© Derechos de edición, arte gráfico y diagramación reservados:  
Empresa Editora Macro EIRL

**Jefe de edición:**  
Cynthia Arestegui Baca

**Coordinación de edición:**  
Magaly Ramon Quiroz

**Diseño de portada:**  
Alessandra Bonilla Zapata

**Corrección de estilo:**  
Erik Tacuchi Villanueva

**Diagramación:**  
Gretty Escobar Dávila

**Edición a cargo de:**  
© Empresa Editora Macro EIRL  
Av. Paseo de la República N.° 5613, Miraflores, Lima, Perú

☎ Teléfono: (511) 748 0560  
✉ E-mail: [proyectoeditorial@editorialmacro.com](mailto:proyectoeditorial@editorialmacro.com)  
🌐 Página web: [www.editorialmacro.com](http://www.editorialmacro.com)

Primera edición: octubre 2015  
Tiraje: 1000 ejemplares

**Impresión**  
Talleres gráficos de la Empresa Editora Macro EIRL  
Jr. San Agustín N.° 612-624, Surquillo, Lima, Perú

ISBN N.° 978-612-304-310-0  
Hecho el depósito legal en la Biblioteca Nacional del Perú N.° 2015-13746

Prohibida la reproducción parcial o total, por cualquier medio o método, de este libro sin previa autorización de la Empresa Editora Macro EIRL.

# ÍNDICE

Introducción.....	13
<b>CAPÍTULO 1: Conceptos básicos</b>	
1.1 Esfuerzo.....	18
1.2 Deformación .....	19
1.3 Diagrama esfuerzo-deformación.....	20
1.3.1 Elementos del diagrama esfuerzo-deformación .....	20
1.4 Ley de Hooke.....	21
<b>CAPÍTULO 2: Método de la rigidez</b>	
2.1 Origen.....	23
2.2 Consideraciones y conceptos básicos.....	25
<b>CAPÍTULO 3: Estructuras articuladas</b>	
3.1 Matriz de rigidez de elementos articulados .....	29
3.1.1 Caso barra simple.....	29
3.1.2 Caso barra compuesta (2 tramos).....	31
3.1.3 Caso general («n» tramos) .....	32
3.1.4 Características de la matriz de rigidez .....	33
<b>CAPÍTULO 4: Transformación de coordenadas</b>	
4.1 Matriz de transformación de barras articuladas .....	45
4.2 Matriz de rigidez global de una barra articulada.....	47
4.3 Matriz de rigidez global con coordenadas 2D .....	51
<b>CAPÍTULO 5: Ensamblaje de la matriz de rigidez de la estructura</b>	
5.1 Solución mediante el método de rigidez .....	60
5.2 Cálculo de deformación unitaria y esfuerzo axial a partir de desplazamientos globales en extremos de una barra.....	64
5.3 Efectos de cambio de temperatura .....	86
<b>CAPÍTULO 6: Apoyos inclinados y apoyos elásticos</b>	
6.1 Apoyos no concordantes con el sistema global (inclinado).....	97
6.1.1 Análisis con <i>Autodesk Robot Structural Analysis Professional</i> .....	112
6.2 Apoyo elástico.....	124

## CAPÍTULO 7: Apoyos con desplazamiento inicial

## CAPÍTULO 8: Análisis tridimensional de barras articuladas

8.1 Análisis tridimensional de barras articuladas con apoyo elástico.....	156
---	-----

## CAPÍTULO 9: Estructuras tipo marco rígido

9.1 Rigidez axial para marcos.....	171
9.2 Rigideces para momento flexionante y fuerza cortante para marcos .....	172
9.2.1 Rigidez por momento flexionante.....	172
9.2.2 Rigidez por desplazamiento vertical.....	177

## CAPÍTULO 10: Matriz de rigidez de elementos tipo marco rígido en 2D

10.1 Matriz de rigidez de elementos tipo marco rígido en 3D .....	187
10.2 Matriz de transformación para estructuras tipo marco.....	189
10.3 Problemas de vigas inclinadas .....	195
10.4 Problema de verificación de desplazamiento.....	206
10.5 Estructura con cargas laterales.....	218
10.6 Pórtico con apoyo empotrado .....	228
10.7 Pórtico con viga inclinada y fuerza nodal .....	244
10.8 Análisis de pórticos de edificios.....	254
10.9 Pórtico con apoyo elástico.....	273

## CAPÍTULO 11: Rigidez lateral de pórticos

11.1 Aplicación en análisis sísmico .....	297
11.2 Rigidez lateral de pórticos .....	298
11.3 Rigidez lateral de un pórtico simple .....	298
11.4 Matriz de rigidez lateral de un pórtico de varios pisos .....	303

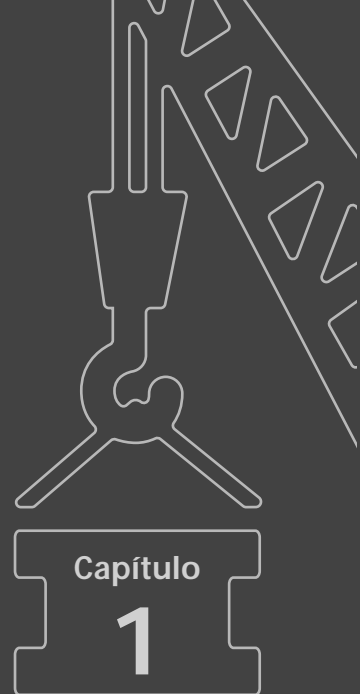
## CAPÍTULO 12: Introducción al método de elementos finitos

12.1 Antecedentes .....	315
12.2 Introducción al método de elementos finitos .....	317
12.3 Conceptos generales del método.....	317
12.4 Tipos de elementos finitos.....	318
12.4.1 Elemento armadura (figura 12.1).....	318
12.4.2 Elemento viga (figura 12.2).....	319
12.4.3 Elemento marco (figura 12.3) .....	319
12.4.4 Elemento sólido 2D (figura 12.4).....	320
12.4.5 Elemento placa (figura 12.5).....	320
12.4.6 Elemento cascarón (figura 12.6).....	321
12.4.7 Elemento sólido (figura 12.7).....	321

12.5	Discretización .....	322
12.6	Barras de sección variable .....	324
12.7	Pasos para analizar estructuras mediante el MEF .....	325
12.7.1	Modelamiento .....	325
12.7.2	Solución .....	325
12.7.3	Análisis e interpretación de resultados.....	326
12.8	Análisis de vigas con elementos finitos .....	326
12.9	Estados de esfuerzos y deformaciones .....	336
12.9.1	Componentes de la deformación.....	336
12.10	Estado de esfuerzo y deformación tridimensional.....	337
12.11	Estado de esfuerzo plano.....	340
12.12	Estado de deformación plano.....	342
12.13	Principio de los trabajos virtuales.....	344
12.13.1	Ley del trabajo virtual para cuerpos elásticos .....	344
12.14	Formulación de MEF usando el principio del trabajo virtual.....	346
12.15	Formulación de MEF para elementos lineales (barra biarticulada).....	346
12.15.1	Matriz de rigidez .....	346

## CAPÍTULO 13: Formulación de MEF para elementos bidimensionales

13.1	Elementos triangulares lineales .....	351
13.2	Elemento triangular de tres nodos de Turner.....	352
13.3	Matriz de rigidez del elemento triangular .....	357
13.4	Ensamblaje de la matriz de rigidez de elementos triangulares.....	361
13.5	Problemas de estado tensión plana .....	363
13.6	Problema de estado deformación plana .....	413
	Anexo .....	436
	Glosario .....	439
	Bibliografía .....	444



# Conceptos básicos

Capítulo

1

El proceso de analizar y diseñar una estructura es el inicio del proceso de revisar que todos los puntos materiales de la misma cumplan la ecuación básica del diseño estructural:

## *Acciones < Resistencia*

En la ecuación anterior existen dos términos:

- **ACCIONES.** Es donde se procede a cuantificar las acciones sobre la estructura. Esta cuantificación es un tema del ANÁLISIS ESTRUCTURAL, y complementa lo aprendido en cursos previos de estática, mecánica de materiales (resistencia de materiales) y análisis de estructuras.
- **RESISTENCIAS.** Estas se calculan en cursos posteriores al ANÁLISIS ESTRUCTURAL tales como diseño de estructuras de concreto armado, diseño de estructuras de acero, diseño de puentes, entre otros. Cada uno de estos posee su norma específica establecida en cada país.

Bajo esta perspectiva, el objetivo del presente texto es el aprendizaje de la técnica matemática para el ANÁLISIS ESTRUCTURAL. Debido al auge y avance inherente en la actualidad de la tecnología, algunos métodos quedaron obsoletos; no obstante, cumplieron su objetivo en determinadas épocas en la que no se tenía alcance a los ordenadores con las capacidades vigentes actualmente.

En el presente texto se utilizará la técnica matemática denominada ANÁLISIS MATRICIAL DE ESTRUCTURAS, específicamente utilizando el MÉTODO DE LA RIGIDEZ O MÉTODO DE LOS DESPLAZAMIENTOS, que consiste en modelar exclusivamente barras rectas en el plano 2D o en el espacio 3D.

Realizar el procedimiento de cálculo para determinar los esfuerzos internos y externos implica cuantificar en sus respectivas unidades lo siguiente:

- $\varepsilon$ . Deformaciones unitarias del medio continuo.
- $\sigma$ . Esfuerzos asociados a las deformaciones sufridas por el medio continuo.
- $\delta$ . Desplazamientos de los diferentes puntos del medio continuo que forma la estructura.

Básicamente, medios continuos se refiere a la materia que puede ser estudiada mediante la mecánica de medios continuos. Estas son los sólidos deformables y los fluidos (comprensibles e incomprensibles).

Realizar el análisis estructural de una estructura implica determinar la deformación de los elementos sólidos deformables y cuantificar los esfuerzos internos.

Posteriormente, al proceso de análisis, se realiza el diseño de cualquier elemento o un sistema estructural, lo cual implica responder a dos preguntas: ¿el elemento es resistente a las cargas aplicadas? y ¿tendrá la suficiente rigidez para que las deformaciones no sean excesivas e inadmisibles? Las respuestas a estas preguntas implican el análisis de la resistencia y rigidez de una estructura, a la que usualmente denominamos ANÁLISIS ESTRUCTURAL.

Estos análisis comienzan por el estudio de los conceptos que son el esfuerzo y la deformación. Aspectos que serán definidos a continuación.

Los métodos matriciales tienen dos grandes variantes: el MÉTODO DE LA FLEXIBILIDAD cuyas incógnitas son las fuerzas y el MÉTODO DE LA RIGIDEZ donde sus incógnitas son los desplazamientos. Este enfoque se trabaja en todos los métodos del análisis estructural.

Sin embargo, por las ventajas computacionales, el MÉTODO DE LA RIGIDEZ ha ganado más aceptación.

Así tenemos que  $\{F\} = [K] \cdot \{\delta\}$  es la ECUACIÓN FUNDAMENTAL DEL MÉTODO MATRICIAL DE LOS DESPLAZAMIENTOS O DE RIGIDEZ, donde  $\{F\}$  es el vector de las fuerzas externas,  $[K]$  es la matriz de rigidez del sistema y  $\{\delta\}$  es el vector de desplazamientos de los nudos.

## 1.1 ESFUERZO

Los esfuerzos internos de un elemento están ubicados dentro del material y se distribuyen en toda el área que la conforma. A la fuerza interna se le denomina esfuerzo axial que es la fuerza por unidad de área; la cual se denota con la letra griega sigma ( $\sigma$ ), y es un parámetro que permite comparar la resistencia de dos materiales, ya que establece una base común de referencia.