



Ecuaciones diferenciales

Teoría, aplicaciones y problemas resueltos para ciencias e ingeniería

Autor: Hugo E. Lázaro Manrique

© Derechos de autor registrados:

Empresa Editora Macro EIRL

© Derechos de edición, arte gráfico y diagramación reservados:

Empresa Editora Macro EIRL

Jefe de edición:

Cynthia Arestegui Baca

Coordinación de edición:

Magaly Ramon Quiroz

Diseño de portada:

Alessandra Bonilla Zapata

Corrección ortográfica:

Yadira Cabello Villanueva

Diagramación:

Eduardo Siesquén Aquije

Edición a cargo de:

© Empresa Editora Macro EIRL

Av. Paseo de la República N.° 5613, Miraflores, Lima, Perú

☎ Teléfono: (511) 748 0560

✉ E-mail: proyectoeditorial@editorialmacro.com

🌐 Página web: www.editorialmacro.com

Primera edición: octubre de 2015

Tiraje: 1000 ejemplares

Impresión

Talleres gráficos de la Empresa Editora Macro EIRL

Jr. San Agustín N.° 612-624, Surquillo, Lima, Perú

ISBN N.° 978-612-304-309-4

Hecho el depósito legal en la Biblioteca Nacional del Perú N.° 2015-13750

Prohibida la reproducción parcial o total, por cualquier medio o método, de este libro sin previa autorización de la Empresa Editora Macro EIRL.

ÍNDICE

Introducción	7
CAPÍTULO 1: Generalidades de las ecuaciones diferenciales.....	9
1.1 Definiciones básicas.....	10
1.2 Notación de una ecuación diferencial.....	10
Orden	10
Grado.....	10
Solución.....	11
CAPÍTULO 2: Ecuaciones diferenciales de primer orden y primer grado	17
2.1 Ecuaciones diferenciales de variables separables.....	18
2.2 Ecuación diferencial homogénea.....	21
2.3 Ecuaciones diferenciales exactas.....	26
2.4 Factores integrantes	30
2.5 Ecuaciones diferenciales lineales.....	36
2.6 Ecuaciones diferenciales reductibles a lineales (Bernoulli).....	40
2.7 Ecuaciones diferenciales reductibles a homogéneas	45
2.8 Ecuaciones diferenciales por sustitución sugerida o cambio de variable	53
CAPÍTULO 3: Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales de primer orden.....	57
3.1 Trayectorias ortogonales	58
3.2 Aplicaciones	63
CAPÍTULO 4: Ecuaciones diferenciales de orden n con coeficientes constantes	75
4.1 Definición	76
4.2 Solución de una ecuación diferencial lineal	76
4.3 Procedimientos para hallar la solución general de una ecuación diferencial lineal	78
homogénea con coeficientes constantes	78
4.3.1 Ecuación auxiliar (o característica) con raíces diferentes.....	78
4.3.2 Ecuación auxiliar (o característica) con raíces repetidas.....	79
4.3.3 Ecuación auxiliar con raíces complejas.....	81
4.4 Ecuación completa (no homogénea)	83
4.4.1 Método de los coeficientes indeterminados.....	83
4.4.2 Método de variación de parámetros	86

CAPÍTULO 5: Ecuaciones diferenciales de primer orden y grado superior	93
5.1 Ecuaciones diferenciales solubles para p	94
5.2 Ecuaciones diferenciales solubles para y	98
5.3 Ecuación diferencial soluble para x	102
5.4 Ecuación diferencial de Clairaut	106
CAPÍTULO 6: Aplicaciones.....	111
CAPÍTULO 7: Soluciones en series de ecuaciones diferenciales lineales	121
CAPÍTULO 8: Sistema de ecuaciones diferenciales lineales.....	131
CAPÍTULO 9: Transformada de Laplace.....	149
9.1 Transformaciones de algunas funciones elementales	150
9.2 Tabla de transformadas de Laplace	153
9.3 Transformadas de derivadas.....	154
9.4 Transformaciones inversas	155
9.5 Aplicación a las ecuaciones diferenciales lineales	156

1.1 DEFINICIONES BÁSICAS

Llamaremos ecuación diferencial a toda ecuación que contiene derivadas y/o diferenciales.

- Una ecuación diferencial es **ordinaria** si contiene derivadas respecto a una sola variable independiente.
- Una ecuación diferencial es **parcial** si contiene derivadas respecto a dos o más variables independientes.

Ejemplos

1. $\frac{dy}{dx} = x^2 - 5x + 8$
2. $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 + 6xy \frac{d^2y}{dx^2} - abc x \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 0$
3. $(x^2 - y^2)dy - 5y dx = 0$
4. $\frac{\partial y}{\partial x} = -10xy$
5. $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -ku$

1.2 NOTACIÓN DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL

$$f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Orden

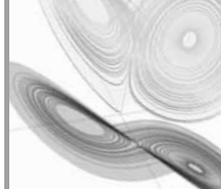
Llamaremos **orden** de una ecuación diferencial ordinaria al mismo que al de la derivada de más alto orden que aparece en la ecuación diferencial.

En los ejemplos anteriores:

- (1) y (3) son de primer orden
 (2) es de tercer orden

Grado

Llamaremos **grado** de una ecuación diferencial ordinaria al grado algebraico de la derivada de más alto orden que aparece en la ecuación diferencial.



En los ejemplos anteriores:

(1) y (3) son de primer grado.

(2) es de segundo grado.

Luego:

Las ecuaciones 1 y 3 son de primer orden y primer grado.

La ecuación 2 es de tercer orden y segundo grado.

Observaciones:

- No todas las ecuaciones diferenciales poseen grado.
- Para determinar el grado de una ecuación diferencial, primero debe racionalizarse la ecuación diferencial de cualquier potencia fraccionaria.

Ejemplos

$$1. (y'')^{2/3} = (8 + y')^3$$

=====

Elevando al cubo ambos miembros:

$$[(y'')^{2/3}]^3 = [(8 + y')^3]^3$$

$$y''^2 = (8 + y')^9$$

Segundo grado_#

$$2. y''' = \sqrt{x - y}$$

=====

Primer grado_#

$$3. e^{y'''} - xy'' + y = 0$$

=====

Tercer orden y no tiene grado_#

Solución

Llamaremos **solución** de una ecuación diferencial ordinaria en dos variables a una relación funcional entre las dos variables que satisfagan la ecuación diferencial.